Αn. 1

No. Date 6/11/2017

Λήμμα

Αν (k_n) είναι $\uparrow$ ακολουθία ακεραίων (δηλαδή $k_n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$)

Τότε $k_n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (*)

Απόδειξη

Θα χρησιμοποιήσω Μαθηματική Επαγωγή

Για $n=1$, η (*) ισχύει διότι $k_1 \in \mathbb{N}$ άρα $k_1 \geq 1$

Έστω ότι (*) ισχύει για $n=m \geq 1$, δηλαδή $k_m \geq m$

Πρέπει να δείξω ότι (*) ισχύει για $n=m+1$ δηλαδή $k_{m+1} > m+1$

Παρατηρώ καταρχάς ότι $k_{m+1} > k_m$ (διότι $(k_n) \uparrow$)

Άρα $k_{m+1} - k_m > 0$

Όμως $k_n \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}$

Συνεπώς $k_{m+1} - k_m \geq 1 \longrightarrow k_{m+1} \geq k_m + 1 \overset{\text{βήμα της επαγωγής}}{\geq} m+1$

Εφαρμογή: Να δειχθεί ότι η ακολουθία $a_n = n!$ δε συγκλίνει

Λύση

Θα δείξω ότι δεν είναι φραγμένη

Έχω $a_n \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Επίσης $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$(a_{n+1} = (n+1)a_n > a_n)$

$\xrightarrow{\text{Λήμμα}} a_n \geq n \quad \forall n$

Άρα η a_n δεν είναι φραγμένη

Πρόταση: Αν (a_n) ακολουθία με $\lim a_n = a$. Τότε $\forall$ υπακολουθία (a_{k_n}) ισχύει $\lim a_{k_n} = a$

(αν $k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k_n \uparrow \Leftrightarrow (a_{k_n})$ υπακολουθία της a_n)

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon>0$

$\lim a_n = a \Rightarrow \exists\, n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n-a|<\varepsilon,\ \forall n\geq n_0$

Για $n\geq n_0$, μέσω προηγούμενου λήμματος $k_n\geq n\geq n_0$

Άρα $|a_{k_n}-a|<\varepsilon\ \ \forall n\geq n_0$ → η σχέση προέκυψε θέτοντας όπου $n=k_n$

$\rightarrow\ a_{k_n}\to a$

Παρατήρηση: Αν για μια ακολουθία (a_n) μπορώ να βρω δύο υπακολουθίες που συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια (ή δε συγκλίνουν καθόλου), τότε η ακολουθία (a_n) δε συγκλίνει

Παράδειγμα

$a_n=(-1)^n$

Ν.δ.ο. (a_n) δε συγκλίνει

Θεωρ. υπακολουθίες $(a_{2n}), (a_{2n-1})$

$$\left.\begin{aligned} a_{2n}&=(-1)^{2n}=1\to 1\\ a_{2n-1}&=(-1)^{2n-1}=-1\to -1\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$ Άρα η a_n δε συγκλίνει

Άσκηση: $a_n=\sin\dfrac{n\pi}{4}$ να δείξω ότι δε συγκλίνει

Δοκιμάζουμε:

$$\left(a_{2n}=\sin\frac{\cancel{2}n\pi}{2\cancel{4}}\ ,\ a_{2n-1}=\sin\frac{(2n-1)\pi}{4}\right)$$

Παίρνω την υπακολουθία

$$b_n=\underbrace{a_{4n}}_{\substack{\| \\ \left(k_n\in\mathbb{N},\ k_n\uparrow\right)}}=\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, & \text{αν } n \text{ άρτιος}\\ (-1)^{n+1} & \text{αν } n \text{ περιττός}\end{cases}$$

Η υπακολουθία περιττών της b_n δεν συγκλίνει

No. Date

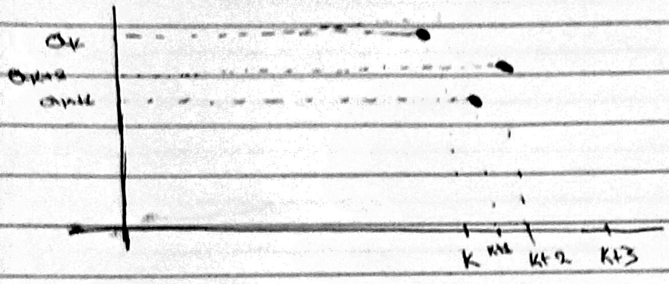
$\rightsquigarrow$ η (b_n) δεν συγκλίνει

$\rightsquigarrow$ η (a_n) δεν συγκλίνει

Γυμνάσιο

Άσκηση: ν.δ.ο. $(-1)^n n^2$ δε συγκλίνει

Ορισμός: Έστω (a_n) ακολουθία. Θα λέμε ότι ο $k \in \mathbb{N}$ είναι θέση σημείου κορυφής για την (a_n). Εάν $a_k \geq a_n \ \forall n \geq k$.
Το ζεύγος (k, a_k) λέγεται σημείο κορυφής



Λήμμα
Κάθε ακολουθία περιέχει μια τουλάχιστον μονότονη υπακολουθία
Απόδειξη
Έστω (a_n) μια ακολουθία
Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις
• Η (a_n) έχει άπειρες θέσεις σημείων κορυφής
Αφού αυτά είναι φυσικοί αριθμοί, μπορώ να τα διατάξω σε μια $\uparrow$ σειρά: $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots\ldots$

Αφού το k_1 είναι θέση σημείου κορυφής $\Rightarrow a_{k_1} \geq a_n \ \forall n \geq k_1$
$n = k_2 > k_1 \rightsquigarrow a_{k_1} \geq a_{k_2}$
Αφού το k_2 είναι θέση σημείου κορυφής $\Rightarrow a_{k_2} \geq a_n \ \forall n \geq k_2$
$\xrightarrow{n = k_3 > k_2} a_{k_2} \geq a_{k_3}$ κ.ο.κ.

No. Date

Άρα $a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq a_{k_3} \geq \dots \dots \rightsquigarrow (a_{k_n}) \downarrow$

• Η (a_n) έχει πεπερασμένες θέσεις σημείων κορυφής (μπορεί και καμία)
Έστω m η μεγαλύτερη θέση σημείου κορυφής (αν δεν έχω θέσεις σημείων κορυφής $m=1$)

Το $m+1$ δεν είναι θέση σημείου κορυφής $\rightsquigarrow \exists\, k_1 > m+1$ τέτοιο ώστε $a_{m+1} > a_{k_1}$
Αφού $k_1 > m+1 \rightsquigarrow k_1$ δεν είναι θέση σημείου κορυφής
$\rightsquigarrow \exists\, k_2 > k_1$ τέτοιο ώστε $a_{k_1} < a_{k_2}$
κ.ο.κ.
$a_{k_1} < a_{k_2} < a_{k_3} < \dots$

Συνεπώς η (a_{k_n}) είναι $\uparrow$ υπακολουθία

<u>Συμπέρασμα:</u> Σε κάθε περίπτωση υπάρχει μονότονη υπακολουθία της (a_n)

<u>Θεώρημα Bolzano - Weierstrass</u>
Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υπακολουθία
<u>Απόδειξη</u>
Έστω (a_n) μια φραγμένη ακολουθία. Από προηγούμενο λήμμα αυτή έχει τουλάχιστον μια μονότονη υπακολουθία (a_{k_n}). Αφού η (a_{k_n}) είναι υπακολουθία φραγμένης ακολουθίας
$\rightsquigarrow a_{k_n}$ είναι φραγμένη.

Άρα (a_{k_n}) συγκλίνει διότι είναι μονότονη και φραγμένη

Για το σπίτι <u>Άσκηση:</u> Με τον ορισμό ν.δ.ο. $\lim \frac{n^2-1}{2n^2+3} = \frac{1}{2}$, $\lim \frac{2n+3}{3n+5} = \frac{2}{3}$

No. Date

Για το πρώτο όριο:

$$\left|\frac{n^2-1}{2n^2+3} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n^2-2-2n^2-3}{4n^2+6}\right| =$$

$$= \frac{5}{4n^2+6} < \frac{5}{4n^2} \le \frac{5}{4n}$$

Έστω $\epsilon > 0$

θέτω $n_0 = \frac{4}{5\epsilon}$

Αν $n \ge n_0 \longrightarrow \frac{5}{4n} \le \frac{5}{4n_0} = \epsilon$